Kolokwium z Matematyki Obliczeniowej, II rok Mat.

(*Ściśle tajne* przed godz. 12:15 10 maja 2023.)

Proszę bardzo uważnie przeczytać treść zadań. Bardzo duży wpływ na ocenę będzie miała czytelność rozwiązań i poprawność uzasadnienia każdej odpowiedzi.

1. Wykaż, że dla dowolnej ustalonej liczby dodatniej c funkcja
$$\varphi(x) \stackrel{\text{def}}{=} \frac{1}{2}\left(x + \frac{1}{cx}\right),$$
ma w zbiorze liczb rzeczywistych dodatnich dokładnie jeden punkt stały α. Następnie wykaż, że ciąg $(x_k)_{k\in\mathbb{N}}$ otrzymany na podstawie wzoru
$$x_{k+1} = \varphi(x_k),$$
z dowolnym $x_0 > 0$, jest zbieżny do punktu α i znajdź wykładnik zbieżności metody iteracyjnej opartej na tym wzorze.

2. Napisz wyrażenie, którego wartość, przy założeniu, że nie wystąpił nadmiar ani niedomiar, zostanie otrzymana po zastosowaniu arytmetyki zmiennopozycyjnej do obliczenia wartości podanej w poprzednim zadaniu funkcji φ w punkcie $\tilde{\alpha} = \mathrm{rd}(\alpha)$. Następnie przekształć to wyrażenie tak, aby otrzymać je w postaci $\varphi(\alpha)(1+\gamma)$ i znajdź jak najmniejszą liczbę K, taką że $|\gamma| \leqslant K\nu$, gdzie $\nu = 2^{-t}$, a t jest liczbą bitów mantysy.

3. Rozważamy liniowe zadanie najmniejszych kwadratów dla układu równań liniowych $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$, w którym
$$A = \begin{bmatrix} 3 & 1 \\ 0 & 2 \\ 4 & -2 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, \qquad \mathbf{b} = \begin{bmatrix} 2 \\ -3 \\ 6 \\ 1 \end{bmatrix}.$$

   a) Napisz układ równań normalnych dla tego zadania.

   b) Rozwiąż zadanie, stosując odbicia Householdera do macierzy A i wektora $\mathbf{b}$.

   c) Znajdź normę drugą wektora residuum znalezionego rozwiązania zadania; najlepiej bez znajdowania tego wektora.

4. Dane są macierze symetryczne i dodatnio określone zbudowane z bloków $T \in \mathbb{R}^{n \times n}$, $v \in \mathbb{R}^n$ oraz $c \in \mathbb{R}$:

$$A_1 = \begin{bmatrix} c & v^T \\ v & T \end{bmatrix}, \qquad A_2 = \begin{bmatrix} T & v \\ v^T & c \end{bmatrix},$$

przy czym blok T jest macierzą trójdiagonalną, a wszystkie współrzędne wektora v są niezerowe. Podaj algorytm znajdowania macierzy trójkątnych dolnych L_1 i L_2, takich że $A_1 = L_1 L_1^T$, $A_2 = L_2 L_2^T$. Podaj (z odpowiednim uzasadnieniem) rzędy złożoności czasowej i pamięciowej implementacji tego algorytmu dostosowanych do każdej z tych macierzy. Dostosowanie polega na wyeliminowaniu wszystkich działań, które nie są konieczne.